$$x^{(3)} = x^{(2)} - \frac{f(x^{(2)})}{f(x^{(2)}) - f(x^{(1)})} \cdot (x^{(2)} - x^{(1)}) = -1{,}41871 - \frac{-0{,}43678}{0{,}858893} \cdot 0{,}15063 = -1{,}34211;$$

$$x^{(4)} = x^{(3)} - \frac{f(x^{(3)})}{f(x^{(3)}) - f(x^{(2)})} \cdot (x^{(3)} - x^{(2)}) = -1{,}34211 - \frac{-0{,}07538}{0{,}361404} \cdot 0{,}0766 = -1{,}32613;$$

$$x^{(5)} = x^{(4)} - \frac{f(x^{(4)})}{f(x^{(4)}) - f(x^{(3)})} \cdot (x^{(4)} - x^{(3)}) = -1{,}32613 - \frac{-0{,}00603}{0{,}069348} \cdot 0{,}01598 = -1{,}32474;$$

$$x^{(6)} = x^{(5)} - \frac{f(x^{(5)})}{f(x^{(5)}) - f(x^{(4)})} \cdot (x^{(5)} - x^{(4)}) = -1{,}32474 - \frac{-0{,}000139}{0{,}005936} \cdot 0{,}00139 =$$
$$= -1{,}32472 \cong x_*.$$

Результаты расчетов приведены в таблице 3.16.

Таблица 3.16

k	0	1	2	3	4	5	6
$x^{(k)}$	–2,00000	–1,56934	–1,41871	–1,34211	–1,32613	–1,32474	–1,32472
$\lvert x^{(k)} - x^{(k-1)} \rvert$	—	0,43066	0,15063	0,07660	0,01598	0,00139	0,00002

Очевидно, метод сходится чуть хуже метода Ньютона (см. пример 3.12), однако скорость сходимости выше линейной.■

3.2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Дана система n нелинейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \end{aligned} \tag{3.22}$$

где $f_i(x_1, \ldots, x_n)$: $R^n \to R$, $i = 1, \ldots, n$ — нелинейные функции, определенные и непрерывные в некоторой области $G \subset R^n$, или в векторном виде

$$F(x) = 0, \tag{3.23}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $F(x) = [f_1(x), \ldots, f_n(x)]^T$.

Требуется найти такой вектор $x_* = (x_{*1}, \ldots, x_{*n})^T$, который при подстановке в систему (3.22) превращает каждое уравнение в верное числовое равенство.

Замечания

1. Проблема решения системы (3.22) возникает при решении многих прикладных задач, например поиска безусловного экстремума функций многих переменных с помощью необходимых условий [31], при применении неявных методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений [33] и т. д.

2. Задача нахождения комплексных корней $f(z) = 0$ может быть сведена к проблеме решения двух уравнений с двумя неизвестными. Для этого следует положить $z = x + iy$ и выделить действительную и мнимую части функции [32]:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = 0.$$

Отсюда получаем систему:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= 0, \\ v(x, y) &= 0, \end{aligned}$$

которая может быть решена одним из рассматриваемых в данном разделе методов.

3. Для всех рассматриваемых далее методов требуется находить начальное приближение $x^{(0)}$. В случае $n = 2$ это можно сделать графически, определив координаты точки пересечения кривых, описываемых уравнениями $f_1(x_1, x_2) = 0$ и $f_2(x_1, x_2) = 0$.

4. Задача решения системы (3.22) может быть сведена к задаче поиска минимума функции $\Psi(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i^2(x_1, \ldots, x_n)$. Так как функция $\Psi(x)$ неотрицательная, ее минимальное значение, равное нулю, достигается в точке x_*, являющейся решением системы (3.22).

Для поиска минимума функции $\Psi(x)$ можно применить различные методы поиска безусловного экстремума функций многих переменных (первого, второго, нулевого порядков) [31].

Далее рассмотрим основные методы решения задачи (3.22).

3.2.2. МЕТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ

Для применения метода требуется привести систему (3.22) к равносильному виду:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \\ x_2 &= \varphi_2(x_1, \ldots, x_n), \\ &\vdots \\ x_n &= \varphi_n(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{3.24}$$

или в векторной форме

$$x = \Phi(x), \tag{3.25}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $\Phi(x) = [\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)]^T$, функции $\varphi_i(x)$ определены и непрерывны в окрестности изолированного решения x_* системы (3.24).

Методика решения задачи

1. Задать начальное приближение $x^{(0)} = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})^T$ и малое положительное число ε (точность). Положить $k = 0$.

2. Вычислить $x^{(k+1)}$ по формуле

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}) \tag{3.26}$$

или

$$\begin{aligned} &x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}),\\ &x_2^{(k+1)} = \varphi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}),\\ &\vdots \\ &x_n^{(k+1)} = \varphi_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}). \end{aligned} \tag{3.27}$$

3. Если $\Delta^{(k+1)} = \max\limits_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \le \varepsilon$, процесс завершен и $x_* \cong x^{(k+1)}$. Если $\Delta^{(k+1)} > \varepsilon$, то положить $k = k + 1$ и перейти к п. 2.

Замечания

1. Итерационный процесс, реализуемый согласно (3.27), соответствует *параллельному итерированию*, так как для вычисления $(k + 1)$-го приближения всех неизвестных учитываются вычисленные ранее их k-е приближения.

2. Система (3.22) может быть преобразована к виду (3.24) различными способами, например с помощью выражения переменных x_i, $i = 1, \ldots, n$, таким образом, чтобы выполнялось условие сходимости.

Другой способ заключается в замене системы $F(x) = 0$ системой

$$x = \underbrace{x + \Lambda F(x)}_{\Phi(x)},$$

где Λ — неособенная матрица. В качестве матрицы Λ можно использовать, например, $\Lambda = -W^{-1}(x^{(0)})$, если $\det W(x^{(0)}) \ne 0$, где

$$W(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{— матрица Якоби.}$$

В случае, если $\det W(x^{(0)}) = 0$, следует выбрать другое начальное приближение. Заметим, что при таком выборе Λ метод простых итераций совпадает с упрощенным методом Ньютона (см. п. 3.2.5).

3. В качестве $\Delta^{(k+1)}$ можно использовать различные нормы векторов (см. п. 1.3.1).

Теорема 3.13 (о достаточном условии сходимости метода простых итераций). *Пусть функции $\varphi_i(x)$ и $\varphi_i'(x)$, $i = 1, \ldots, n$ непрерывны в области G, причем выполнено неравенство*

$$\max_{x\in G} \max_i \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j} \right| \le q < 1, \tag{3.28}$$

где q — некоторая постоянная.

Если последовательные приближения $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$, $k = 0,1, \ldots$ не выходят из области G, то процесс последовательных приближений сходится: $x_* = \lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}$ и вектор x_* является в области G единственным решением системы (3.25).

Замечания

1. Вместо условия (3.28) можно также использовать

$$\max_{x\in G}\max_{j}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial\varphi_i(x)}{\partial x_j}\right|\le q<1. \qquad (3.29)$$

2. Условия (3.28), (3.29) выполняются, если для любого $x\in G$ справедливы неравенства $\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right\|_1<1$, $\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right\|_2<1$ соответственно, где

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial\varphi_n(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n(x)}{\partial x_n}\end{pmatrix}.$$

Пример 3.17. Найти корни системы

$$2x_1^2-x_1x_2-5x_1+1=0,$$
$$x_1+3\cdot\lg x_1-x_2^2=0,$$

расположенные в первом квадранте, методом простых итераций с точностью $\varepsilon=0{,}001$.

□Преобразуем систему к виду (3.24) так, чтобы выполнялось условие сходимости:

$$x_1=\sqrt{\frac{x_1(x_2+5)-1}{2}}=\varphi_1(x),$$
$$x_2=\sqrt{x_1+3\cdot\lg x_1}=\varphi_2(x).$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}=\frac{x_2+5}{4\sqrt{\frac{x_1(x_2+5)-1}{2}}},\quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}=\frac{x_1}{4\sqrt{\frac{x_1(x_2+5)-1}{2}}};$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}=\frac{1+\frac{3\cdot 0{,}43429}{x_1}}{2\sqrt{x_1+3\cdot\lg x_1}},\quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}=0.$$

Здесь принято $\lg e\cong 0{,}43429$. Далее воспользуемся методикой решения задачи.

1. Для выбора начального приближения найдем координаты точек пересечения кривых, соответствующих первому и второму уравнениям (рис. 3.17).

Находим приближенные значения координат решения (по условию задачи нас интересуют только корни с положительными координатами): $x^{(0)}=(3{,}5;\ 2{,}2)^T$.

Проверим выполнение условий сходимости. Будем рассматривать окрестность найденной точки $x^{(0)}$: $G=\{|x_1-3{,}5|\le 0{,}1;\ |x_2-2{,}2|\le 0{,}1\}$. Тогда

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\right| \le \frac{2{,}3+5}{4\sqrt{\dfrac{3{,}4\cdot(2{,}1+5)-1}{2}}} = 0{,}536 < 0{,}54; \quad \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\right| \le \frac{3{,}6}{4\sqrt{\dfrac{3{,}4\cdot(2{,}1+5)-1}{2}}} = 0{,}265 < 0{,}27;$$

$$\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\right| \le \frac{1+\dfrac{3\cdot 0{,}43429}{3{,}4}}{2\sqrt{3{,}4+3\cdot\lg 3{,}4}} = 0{,}309 < 0{,}31; \quad \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\right| = 0.$$

Следовательно, можно получить оценки:

$$\left|\frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2(x)}{\partial x_1}\right| < 0{,}54+0{,}31 = 0{,}85 < 1,$$

$$\left|\frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_2}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2(x)}{\partial x_2}\right| < 0{,}27+0 = 0{,}27 < 1.$$

Очевидно, условие (3.28) выполняется. Если последовательные приближения не будут выходить из области G, то согласно теореме 3.13 итерационный процесс будет сходящимся. В поставленной задаче $\varepsilon = 0{,}001$.

2, 3. Выполним расчеты по формулам (3.27):

$$x_1^{(k+1)} = \sqrt{\frac{x_1^{(k)}\cdot\left[x_2^{(k)}+5\right]-1}{2}}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

$$x_2^{(k+1)} = \sqrt{x_1^{(k)} + 3\cdot\lg x_1^{(k)}},$$

а результаты поместим в таблицу 3.17.

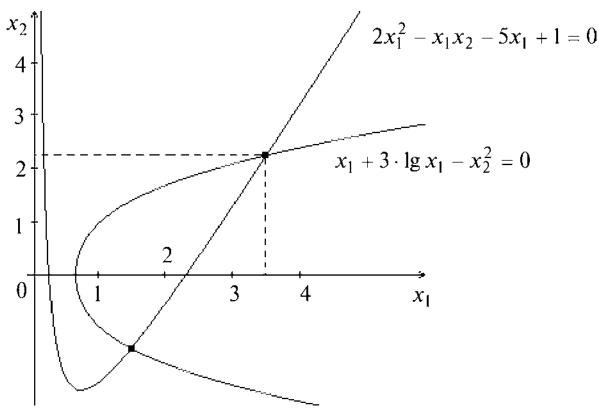

Рис. 3.17

Таблица 3.17

k	0	1	2	3	4
$x_1^{(k)}$	3,5000	3,4785	3,4837	3,4848	3,4957
$x_2^{(k)}$	2,2000	2,2654	2,2589	2,26049	2,26082
$\Delta^{(k+1)}$	—	0,0654	0,0065	0,00159	0,0009

Заметим, что величина $\Delta^{(k+1)}$ при увеличении номера итерации уменьшается, что характерно для любого сходящегося процесса. Найдено приближенное решение: $x_* \cong (3{,}4857;\ 2{,}2608)^T$. При этом $f_1(x_*) = -0{,}0083$, $f_2(x_*) = 0{,}00126$.■

3.2.3. МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ

Метод Зейделя предназначен для решения систем, записанных в форме (3.24). Этот метод является модификацией метода простых итераций, где после задания начального приближения $x^{(0)}$ вместо параллельного итерирования производится *последовательное итерирование*, причем на каждой итерации в каждое последующее уравнение подставляются значения неизвестных, полученных из предыдущих уравнений.

Методика решения задачи

1. Задать начальное приближение $x^{(0)}$ и малое положительное число ε (точность). Положить $k = 0$.

2. Вычислить $x^{(k+1)}$ по формулам:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \varphi_1\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right), \\ x_2^{(k+1)} &= \varphi_2\left(\boxed{x_1^{(k+1)}}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right), \\ &\vdots \\ x_n^{(k+1)} &= \varphi_n\left(\boxed{x_1^{(k+1)}}, \boxed{x_2^{(k+1)}}, \ldots, \boxed{x_{n-1}^{(k+1)}}, x_n^{(k)}\right), \end{aligned} \tag{3.30}$$

где прямоугольниками отмечены значения, которые берутся из предшествующих уравнений на текущей итерации.

3. Если $\Delta^{(k+1)} = \max\limits_i \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| \le \varepsilon$, процесс завершить и положить $x_* \cong x^{(k+1)}$. Если $\Delta^{(k+1)} > \varepsilon$, то положить $k = k + 1$ и перейти к п. 2.

Пример 3.18. Найти корни системы

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 2x_1^2 - x_1 x_2 - 5x_1 + 1 = 0, \\ f_2(x_1, x_2) &= x_1 + 3 \cdot \lg x_1 - x_2^2 = 0, \end{aligned}$$

расположенные в первом квадранте, методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

□Преобразование системы к виду (3.24) и поиск начального приближения описаны в примере 3.17.

1. Зададим начальное приближение $x^{(0)} = (3{,}5;\ 2{,}2)^T$. В поставленной задаче $\varepsilon = 0{,}001$.

2, 3. Выполним расчеты по формулам (3.30):

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \sqrt{\frac{x_1^{(k)} \cdot \left[x_2^{(k)} + 5\right] - 1}{2}}, \quad k = 0, 1, \ldots, \\ x_2^{(k+1)} &= \sqrt{x_1^{(k+1)} + 3 \cdot \lg x_1^{(k+1)}}, \end{aligned}$$

а результаты поместим в таблицу 3.18.

Таблица 3.18

k	0	1	2	3	4	5
$x_1^{(k)}$	3,5000	3,4785	3,4821	3,484250	3,485537	3,486305
$x_2^{(k)}$	2,2000	2,2588	2,2600	2,260658	2,261049	2,26128
Δ	—	0,0588	0,0036	0,00215	0,00128	0,0007

Найдено приближенное решение $x_* \cong (3{,}4863;\ 2{,}2613)^T$. При этом $f_1(x_*) = -0{,}006425$, $f_2(x_*) = 0{,}000007$.

3.2.4. МЕТОД НЬЮТОНА

Метод используется для решения систем вида (3.22) или (3.23). Расчетная формула для нахождения решения является естественным обобщением формулы (3.14):

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - W^{-1}(x^{(k)}) \cdot F(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{3.31}$$

где

$$W(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

является матрицей Якоби.

Так как процесс вычисления обратной матрицы является трудоемким, преобразуем (3.31) следующим образом:

$$\Delta x^{(k)} = -W^{-1}(x^{(k)}) \cdot F(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где $\Delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$ — поправка к текущему приближению $x^{(k)}$.

Умножим последнее выражение слева на матрицу Якоби $W(x^{(k)})$:

$$W(x^{(k)})\Delta x^{(k)} = -W(x^{(k)})W^{-1}(x^{(k)})F(x^{(k)}) = -F(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \ldots$$

В результате получена система линейных алгебраических уравнений относительно поправки $\Delta x^{(k)}$. После ее определения вычисляется следующее приближение $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$.

Методика решения задачи

1. Задать начальное приближение $x^{(0)}$ и малое положительное число ε (точность). Положить $k = 0$.

2. Решить систему линейных алгебраических уравнений относительно поправки $\Delta x^{(k)}$:

$$W(x^{(k)}) \cdot \Delta x^{(k)} = -F(x^{(k)}). \tag{3.32}$$

3. Вычислить следующее приближение:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}.$$

4. Если $\Delta^{(k+1)} = \max\limits_i \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| \le \varepsilon$, процесс закончить и положить $x_* \cong x^{(k+1)}$. Если $\Delta^{(k+1)} > \varepsilon$, то положить $k = k + 1$ и перейти к п. 2.

Теорема 3.14 (о достаточных условиях сходимости метода Ньютона).

Пусть функция $F(x)$ *непрерывно дифференцируема в открытом выпуклом множестве* $G \subset R^n$. *Предположим, что существуют* $x_* \in R^n$ *и* r, $\beta > 0$, *такие, что* $N(x_*, r) \subset G$, $F(x_*) = 0$, *и существует* $W^{-1}(x_*)$, *причем* $\|W^{-1}(x_*)\| \le \beta$ *и* $W(x) \in Lip_\gamma(N(x_*, r))$. *Тогда существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что для всех* $x^{(0)} \in N(x_*, \varepsilon)$ *последовательность* $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$, *порождаемая соотношением* (3.31), *сходится к* x_* *и удовлетворяет неравенству*

$$\|x^{(k+1)} - x_*\| \le \beta\gamma \|x^{(k)} - x_*\|^2, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Здесь использованы следующие обозначения: $N(x, r)$ — открытая окрестность радиуса r с центром в точке x: $N(x,r) = \{\overline{x} \in R^n : |\overline{x} - x| < r\}$; запись $W(x) \in Lip_\gamma(N(x_*, r))$ означает, что $W(x)$ непрерывна по Липшицу, где γ — константа Липшица, т. е. $\|W(y) - W(x)\| \le \gamma \|y - x\| \;\; x, y \in N(x_*, r)$.

Замечания

1. Теорема 3.14 свидетельствует о локальной квадратичной сходимости метода Ньютона.

2. К недостаткам метода Ньютона следует отнести:

- необходимость задавать достаточно хорошее начальное приближение;
- отсутствие глобальной сходимости для многих задач;
- необходимость вычисления матрицы Якоби на каждой итерации;
- необходимость решения на каждой итерации системы линейных уравнений, которая может быть плохо обусловленной.

Достоинством метода является квадратичная сходимость из хорошего начального приближения при условии невырожденности матрицы Якоби.

Пример 3.19. Решить систему:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3 &= 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 9 &= 0 \end{aligned}$$

методом Ньютона с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

□Очевидно, корнями системы являются $x_{*1} = (3;\ 0)^T$, $x_{*2} = (0;\ 3)^T$. Найдем приближенно второй корень x_{*2}.

1. Зададим начальное приближение $x^{(0)} = (1;\ 5)^T$. В поставленной задаче $\varepsilon = 0{,}001$. Положим $k = 0$.

2^0. Составим систему (3.32). Так как матрица

$$W(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix},$$

то система $W(x^{(0)}) \cdot \Delta x^{(0)} = -F(x^{(0)})$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_1^{(0)} \\ \Delta x_2^{(0)} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\Delta x^{(0)} = \begin{pmatrix} \Delta x_1^{(0)} \\ \Delta x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{8} \\ -\frac{11}{8} \end{pmatrix}.$$

Для вычисления $\Delta x^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots$, здесь и далее используется метод Гаусса единственного деления (см. п. 1.2.1).

3^0. Вычислим

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{13}{8} \\ -\frac{11}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{8} \\ \frac{29}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}625 \\ 3{,}625 \end{pmatrix}.$$

4^0. Так как $\Delta^{(1)} = \max\left\{\left|-\frac{13}{8}\right|, \left|-\frac{11}{8}\right|\right\} = \frac{13}{8} > \varepsilon$, то положим $k = 1$ и перейдем к п. 2.

2^1. Составим систему $W(x^{(1)}) \cdot \Delta x^{(1)} = -F(x^{(1)})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{5}{4} & \frac{29}{4} \end{pmatrix} \cdot \Delta x^{(1)} = -\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{145}{32} \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\Delta x^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{145}{272} \\ -\frac{145}{272} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5333 \\ -0{,}5333 \end{pmatrix}.$$

3^1. Вычислим

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \Delta x^{(1)} = \begin{pmatrix} -0{,}625 \\ 3{,}625 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}5333 \\ -0{,}5333 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}0919 \\ 3{,}0919 \end{pmatrix}.$$

4^1. Так как $\Delta^{(2)} = 0{,}5333 > \varepsilon$, то положим $k = 2$ и перейдем к п. 2. Результаты дальнейших вычислений приведены в таблице 3.19.

Таблица 3.19

k	0	1	2	3	4	5
$x_1^{(k)}$	1	–0,625	–0,091911	–0,002653	–0,0000023	0,0000
$x_2^{(k)}$	5	3,625	3,091911	3,002653	3,0000023	3,0000
$\Delta^{(k+1)}$	—	1,625	0,5333	0,089258	0,0026507	0,0000023

Найденное приближенное решение $x_* \cong (0;\ 3{,}0000)^T$. Из анализа решения, приведенного в таблице 3.19, следует, что количество верных знаков на каждой итерации удваивается, что соответствует квадратичной сходимости. ■

Пример 3.20. Найти решение системы

$$f_1(x) = x_1 + 3 \cdot \lg x_1 - x_2^2 = 0,$$
$$f_2(x) = 2x_1^2 - x_1 x_2 - 5x_1 + 1 = 0,$$

расположенное в первом квадранте, с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$.

□1. Выберем начальное приближение $x^{(0)} = (3{,}5;\ 2{,}2)^T$. В поставленной задаче $\varepsilon = 10^{-5}$. Положим $k = 0$.

2^0. Составим систему (3.32).

Так как

$$W(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{3 \cdot 0{,}43429}{x_1} & -2x_2 \\ 4x_1 - x_2 - 5 & -x_1 \end{pmatrix},$$

то

$$W(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{3 \cdot 0{,}43429}{3{,}5} & -2 \cdot 2{,}2 \\ 4 \cdot 3{,}5 - 2{,}2 - 5 & -3{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}372248571 & -4{,}4 \\ 6{,}8 & -3{,}5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1{,}372248571 & -4{,}4 \\ 6{,}8 & -3{,}5 \end{pmatrix} \Delta x^{(0)} = -F(x^{(0)}) =$$

$$= -\begin{pmatrix} 3{,}5 + 3 \cdot \lg 3{,}5 - 2{,}2^2 \\ 2 \cdot 3{,}5^2 - 3{,}5 \cdot 2{,}2 - 5 \cdot 3{,}5 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}29220413 \\ -0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Отсюда с помощью метода Гаусса единственного деления находим

$$\Delta x^{(0)} = \begin{pmatrix} -0{,}011835967 \\ 0{,}062718692 \end{pmatrix}.$$

3^0. Вычислим

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x^{(0)} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 2{,}2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}011835967 \\ 0{,}062718692 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}488164032 \\ 2{,}262718691 \end{pmatrix}.$$

Этот же результат может быть непосредственно получен по формуле (3.31):

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 2{,}2 \end{pmatrix} - \frac{1}{25{,}11713} \begin{pmatrix} -3{,}5 & 4{,}4 \\ -6{,}8 & 1{,}37248571 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}29220413 \\ -0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}488164032 \\ 2{,}262718691 \end{pmatrix}.$$

4^0. Так как $\Delta^{(1)} = \max\{0{,}011835967;\ 0{,}062718692\} = 0{,}062718692 > \varepsilon$, то положим $k = 1$ и перейдем к п. 2.

2^1. Составим систему (3.32):

$$\begin{pmatrix} 1{,}373511678 & -4{,}525437382 \\ 6{,}689937437 & -3{,}488164032 \end{pmatrix} \Delta x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0{,}00394114 \\ -0{,}00102252 \end{pmatrix}.$$

Применяя метод Гаусса единственного деления, получаем

$$\Delta x^{(1)} = \begin{pmatrix} -7{,}21032383 \cdot 10^{-4} \\ -0{,}001089727 \end{pmatrix}.$$

3^1. Вычислим

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \Delta x^{(1)} = \begin{pmatrix} 3{,}487443 \\ 2{,}261628964 \end{pmatrix}.$$

Таблица 3.20

k	0	1	2	3
$x_1^{(k)}$	3,500000	3,488164032	3,487443000	3,487442788
$x_2^{(k)}$	2,200000	2,262718691	2,261628964	2,261628631
Δ	—	0,062718692	0,001089727	$3{,}334461599 \cdot 10^{-7}$

4^1. Так как $\Delta^{(2)} = \max\{|-7{,}21032383 \cdot 10^{-4}|; |-0{,}001089727|\} = 0{,}001089727 > \varepsilon$, то положим $k = 2$ и продолжим решение по алгоритму. Результаты дальнейших расчетов приведены в таблице 3.20.

Из сопоставления полученных результатов с таблицей 3.17 следует, что по методу простых итераций точность $\varepsilon = 0{,}001$ достигается за четыре итерации, а методом Ньютона точность $\varepsilon = 10^{-5}$ достигнута всего за три приближения.■

Пример 3.21. Найти решение системы:

$$\begin{aligned} &x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \\ &2x_1^2 + x_2^2 - 4x_3 = 0, \\ &3x_1^2 - 4x_2 + x_3^2 = 0 \end{aligned}$$

методом Ньютона с точностью $\varepsilon = 0{,}005$.

□1. Выберем в качестве начального приближения $x^{(0)} = (0{,}5;\ 0{,}5;\ 0{,}5)^T$. В поставленной задаче $\varepsilon = 0{,}005$. Положим $k = 0$.

2^0, 3^0. Воспользуемся формулой (3.31). Матрица Якоби имеет вид

$$W(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ 4x_1 & 4x_2 & -4 \\ 6x_1 & -4 & 2x_3 \end{pmatrix}.$$

В точке $x^{(0)}$ справедливо

$$W(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix},\quad F(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}25 - 1 \\ 0{,}5 + 0{,}25 - 2 \\ 0{,}75 - 2 + 0{,}25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}25 \\ -1{,}25 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\det W(x^{(0)}) = -40,\quad W^{-1}(x^{(0)}) = -\frac{1}{40}\begin{pmatrix} -15 & -5 & -5 \\ -14 & -2 & 6 \\ -11 & 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{3}{20} \\ \frac{11}{40} & -\frac{7}{40} & \frac{1}{40} \end{pmatrix}.$$

В результате

$$x^{(1)} = x^{(0)} - W^{-1}(x^{(0)}) \cdot F(x^{(0)}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{3}{20} \\ \frac{11}{40} & -\frac{7}{40} & \frac{1}{40} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0{,}25 \\ -1{,}25 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}375 \\ 0 \\ -0{,}125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}875 \\ 0{,}5 \\ 0{,}375 \end{pmatrix}.$$

4^0. Так как $\Delta^{(1)} = \max\{0,375;\ 0;\ |-0,125|\} = 0,375 > \varepsilon$, то положим $k = 1$ и перейдем к п. 2.

2^1. В точке $x^{(1)}$ справедливо

$$W(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 2\cdot 0,875 & 2\cdot 0,5 & 2\cdot 0,375 \\ 4\cdot 0,875 & 2\cdot 0,5 & -4 \\ 6\cdot 0,875 & -4 & 2\cdot 0,375 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,75 & 1 & 0,75 \\ 3,5 & 1 & -4 \\ 5,25 & -4 & 0,75 \end{pmatrix},$$

$$F(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0,875^2 + 0,5^2 + 0,375^2 - 1 \\ 2\cdot 0,875^2 + 0,5^2 - 4\cdot 0,375 \\ 3\cdot 0,875^2 - 4\cdot 0,5 + 0,375^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,15625 \\ 0,28125 \\ 0,4375 \end{pmatrix}.$$

Составим и решим систему

$$\begin{pmatrix} 1,75 & 1 & 0,75 \\ 3,5 & 1 & -4 \\ 5,25 & -4 & 0,75 \end{pmatrix} \cdot \Delta x^{(1)} = -\begin{pmatrix} 0,15625 \\ 0,28125 \\ 0,4375 \end{pmatrix}.$$

С помощью метода Гаусса единственного деления получаем

$$\Delta x^{(1)} = \begin{pmatrix} -0,084995 \\ -0,0032467 \\ -0,0056818 \end{pmatrix}.$$

3^1. Вычислим

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \Delta x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,790005 \\ 0,496753 \\ 0,369318 \end{pmatrix}.$$

4^1. Так как $\Delta^{(2)} = \max\limits_i \left|\Delta x_i^{(1)}\right| = 0,084995 > \varepsilon = 0,005,$ то положим $k = 2$ и перейдем к п. 2.

2^2. Составим и решим систему

$$\begin{pmatrix} 1,58001 & 0,993506 & 0,738636 \\ 3,16002 & 1,987012 & -4 \\ 4,74003 & -4 & 0,738636 \end{pmatrix} \Delta x^{(2)} = -\begin{pmatrix} 0,007267 \\ 0,017707 \\ 0,021707 \end{pmatrix}.$$

Применяя метод Гаусса, находим

$$\Delta x^{(2)} = \begin{pmatrix} -0,004785 \\ -0,000136 \\ 0,000579 \end{pmatrix}.$$

3^2. Вычислим

$$x^{(3)} = x^{(2)} + \Delta x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,785220 \\ 0,496617 \\ 0,369897 \end{pmatrix}.$$

4^2. Так как $\Delta^{(3)} = \max\limits_i \left|\Delta x_i^{(2)}\right| = 0,004785 < 0,005,$ то процесс завершен и $x_* \cong x^{(3)}$.■

3.2.5. МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА НЬЮТОНА

А. Упрощенный метод Ньютона. В этом методе в отличие от метода Ньютона (3.31) обратная матрица ищется только один раз в начальной точке $x^{(0)}$:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - W^{-1}(x^{(0)}) \cdot F(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{3.33}$$

Заметим, что при решении одного уравнения $f(x) = 0$ упрощенным методом Ньютона производная функции вычисляется также один раз в начальной точке (см. п. 3.1.7).

Методика решения задачи аналогична изложенной в п. 3.2.4, где вместо (3.32) используется система

$$W(x^{(0)}) \cdot \Delta x^{(k)} = -F(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

матрица которой $W(x^{(0)})$ не изменяется от итерации к итерации.

Очевидно, сходимость упрощенного метода Ньютона в общем случае хуже по сравнению со сходимостью процесса (3.31).

Пример 3.22. Найти положительное решение системы

$$f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0,$$
$$f_2(x) = x_1^3 - x_2 = 0$$

упрощенным методом Ньютона с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

□1. Выберем начальное приближение. Из рисунка 3.18 следует, что для нахождения положительного решения системы можно принять $x^{(0)} = (0{,}9;\ 0{,}5)^T$.

В поставленной задаче $\varepsilon = 10^{-4}$. Положим $k = 0$.

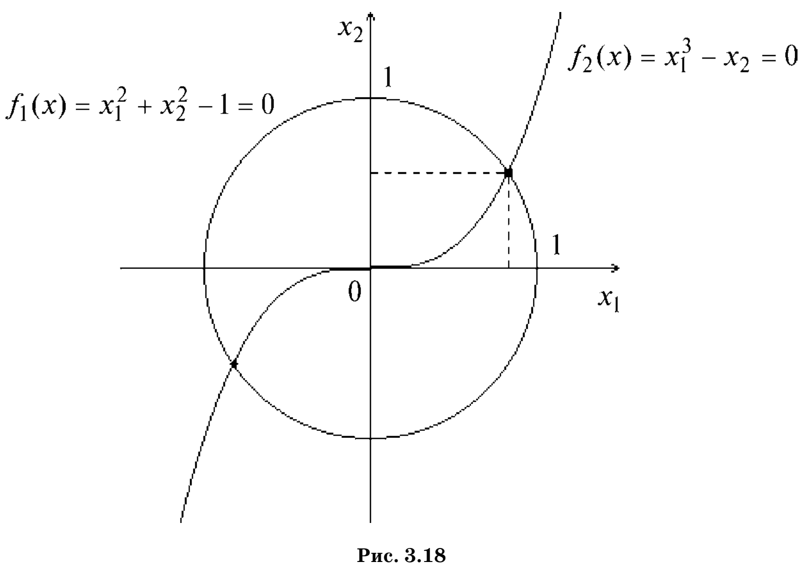

Рис. 3.18

2^0, 3^0. Так как

$$W(x)=\begin{pmatrix}2x_1 & 2x_2\\ 3x_1^2 & -1\end{pmatrix},\quad F(x)=\begin{pmatrix}x_1^2+x_2^2-1\\ x_1^3-x_2\end{pmatrix},$$

то для выполнения вычислений по формуле (3.33) найдем обратную матрицу $W^{-1}(x^{(0)})$:

$$W(x^{(0)})=\begin{pmatrix}1{,}8 & 1\\ 2{,}43 & -1\end{pmatrix},\quad \det W(x^{(0)})=-1{,}8-2{,}43=-4{,}23;$$

$$W^{-1}(x^{(0)})=-\frac{1}{4{,}23}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -2{,}43 & 1{,}8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}2364 & 0{,}2364\\ 0{,}5745 & -0{,}4255\end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$x^{(1)}=x^{(0)}-W^{-1}(x^{(0)})\cdot F(x^{(0)})=$$

$$=\begin{pmatrix}0{,}9\\ 0{,}5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0{,}2364 & 0{,}2364\\ 0{,}5745 & -0{,}4255\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}060\\ 0{,}229\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}9\\ 0{,}5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0{,}06832\\ -0{,}06297\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}83167\\ 0{,}56298\end{pmatrix}.$$

4^0. Так как $\Delta^{(1)}=\max\{|-0{,}06832|,|0{,}06297|\}=0{,}06832>\varepsilon$, то положим $k=1$ и перейдем к п. 2.

2^1, 3^1. По формуле (3.33) получаем

$$x^{(2)}=x^{(1)}-W^{-1}(x^{(0)})\cdot F(x^{(1)})=$$

$$=\begin{pmatrix}0{,}83167\\ 0{,}56298\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0{,}2364 & 0{,}2364\\ 0{,}5745 & -0{,}4255\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}008619\\ 0{,}012267\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0{,}83167\\ 0{,}56298\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0{,}004937\\ -0{,}000268\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}826732\\ 0{,}563246\end{pmatrix}.$$

4^1. Так как $\Delta^{(2)}=0{,}004937>\varepsilon$, то положим $k=2$ и перейдем к п. 2.

2^2, 3^2. По формуле (3.33) получаем

$$x^{(3)}=x^{(2)}-W^{-1}(x^{(0)})\cdot F(x^{(2)})=$$

$$=\begin{pmatrix}0{,}826732\\ 0{,}563246\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0{,}2364 & 0{,}2364\\ 0{,}5745 & -0{,}4255\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}000732\\ 0{,}001814\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0{,}826732\\ 0{,}563246\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0{,}000602\\ -0{,}000351\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}82613\\ 0{,}56359\end{pmatrix}.$$

4^2. Поскольку $\Delta^{(3)}=0{,}000602>\varepsilon$, то положим $k=3$ и перейдем к п. 2.

2^3, 3^3. По формуле (3.33) имеем

$$x^{(4)}=x^{(3)}-W^{-1}(x^{(0)})\cdot F(x^{(3)})=$$

$$=\begin{pmatrix}0{,}82613\\ 0{,}56359\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0{,}2364 & 0{,}2364\\ 0{,}5745 & -0{,}4255\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}000124\\ 0{,}000236\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0{,}82613\\ 0{,}56359\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8{,}524\cdot10^{-5}\\ -2{,}89692\cdot10^{-5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}8260447\\ 0{,}5636189\end{pmatrix}.$$

4^3. Поскольку $\Delta^{(4)}=8{,}524\cdot10^{-5}<\varepsilon=0{,}0001$, то процесс завершен и $x_*\cong x^{(4)}$.■

Б. Метод секущих. Идея метода секущих (*метода Бройдена*) заключается в аппроксимации матрицы Якоби с использованием уже вычисленных значений функций, образующих систему (сравните с методом секущих для уравнения $f(x) = 0$, изложенным в п. 3.1.7).

Методика решения задачи

1. Задать начальное приближение $x^{(0)}$ и малое положительное число ε.
2. Положить $k = 0$ и $A_0 = W(x^{(0)})$, где $W(x)$ — матрица Якоби.
3. Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$A_k s_k = -F(x^{(k)})$$

относительно s_k — поправки к текущему приближению.

4. Вычислить $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s_k$.
5. Если $\|s_k\| \le \varepsilon$, процесс завершить и положить $x_* = x^{(k+1)}$. Если $\|s_k\| > \varepsilon$, вычислить

$$y_k = F(x^{(k+1)}) - F(x^{(k)}),\;\; A_{k+1} = A_k + \frac{(y_k - A_k s_k)\cdot s_k^T}{s_k^T s_k},$$

положить $k = k + 1$ и перейти к п. 3.

Замечания

1. Можно доказать [11], что если $x^{(0)}$ достаточно близко к корню x_*, где матрица Якоби $W(x_*)$ не вырождена, и если A_0 достаточно близка к $W(x^{(0)})$, то последовательность итераций $\{x^{(k)}\}$ сходится к x_* сверхлинейно.

2. Когда метод секущих сходится к x_* сверхлинейно, нельзя предполагать, что последняя из аппроксимаций якобиана A_k будет приблизительно равняться $W(x_*)$, хотя часто это именно так.

Пример 3.23. Решить систему

$$f_1(x) = x_1 + x_2 - 3 = 0,$$
$$f_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - 9 = 0$$

методом секущих.

☐1. Как следует из примера 3.18, для нахождения корня $x_* = (0;3)^T$ можно выбрать начальное приближение $x^{(0)} = (1;5)^T$ и $\varepsilon = 0{,}001$.

2. Положим $k = 0$ и

$$A_0 = W(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}, \text{так как } W(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x_2 & 2x_2 \end{pmatrix}.$$

3^0. Решим систему $A_0 \cdot s_0 = -F(x^{(0)})$. Так как $F(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 17 \end{pmatrix}$, то

$$s_0 = -A_0^{-1} F(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -1{,}625 \\ -1{,}375 \end{pmatrix}.$$

4^0. Вычислим

$$x^{(1)} = x^{(0)} + s_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1{,}625 \\ -1{,}375 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}625 \\ 3{,}625 \end{pmatrix}.$$

5^0. Поскольку $\|s_0\|_1 = 1{,}625 > \varepsilon$, то вычислим

$$y_0 = F(x^{(1)}) - F(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4{,}53125 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -12{,}46875 \end{pmatrix},$$

$$s_0^T s_0 = (-1{,}625 \quad -1{,}375)\begin{pmatrix} -1{,}625 \\ -1{,}375 \end{pmatrix} = 4{,}53125,$$

$$y_0 - A_0 s_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ -12{,}46875 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1{,}625 \\ -1{,}375 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -12{,}46875 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4{,}53125 \end{pmatrix},$$

$$(y_0 - A_0 s_0)\cdot s_0^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 4{,}53125 \end{pmatrix}(-1{,}625 \quad -1{,}375);$$

$$A_1 = A_0 + \frac{(y_0 - A_0 s_0)\cdot s_0^T}{s_0^T s_0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1{,}625 & -1{,}375 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}375 & 8{,}625 \end{pmatrix}.$$

Положим $k = 1$ и перейдем к п. 3.

3^1. Решим систему $A_1 \cdot s_1 = -F(x^{(1)})$, т. е.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}375 & 8{,}625 \end{pmatrix} s_1 = -\begin{pmatrix} 0 \\ 4{,}53125 \end{pmatrix}.$$

Применяя метод Гаусса, получаем

$$s_1 = -A_1^{-1} \cdot F(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0{,}549 \\ -0{,}549 \end{pmatrix}.$$

4^1. Вычислим

$$x^{(2)} = x^{(1)} + s_1 = \begin{pmatrix} -0{,}625 \\ 3{,}625 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}549 \\ -0{,}549 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}076 \\ 3{,}076 \end{pmatrix}.$$

5^1. Поскольку $\|s_1\|_1 = 0{,}549 > \varepsilon$, то вычислим

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -0{,}799 & 8{,}201 \end{pmatrix},$$

положим $k = 2$ и перейдем к п. 3. Результаты вычислений приведены в таблице 3.21.

Полученное приближенное решение $x_* \cong (0{,}0000013;\ 3{,}0000013)^T$.■

Таблица 3.21

k	0	1	2	3	4	5
$x_1^{(k)}$	1	–0,625	–0,0757575	–0,0127942	–0,0003138	0,0000013
$x_2^{(k)}$	5	3,625	3,0757575	3,0127942	3,0003138	3,0000013
Δ	—	1,625	0,549	0,0629	0,01248	0,00031

Пример 3.24. Решить систему

$$x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0,$$
$$e^{x_1 - 1} + x_2^3 - 2 = 0$$

методом секущих с точностью $\varepsilon = 0{,}01$.

Таблица 3.22

k	0	1	2	3	4	5	6
$x_1^{(k)}$	1,5	0,8060692	0,7410741	0,8022786	0,9294701	1,004003	1,003084
$x_2^{(k)}$	2	1,457948	1,277067	1,159900	1,070406	1,003084	0,9992213
Δ	—	0,69393	0,18088	0,11717	0,12719	0,07453	0,0038

□Очевидно, точное решение системы $x_* = (1;\,1)^T$. Выберем начальное приближение $x^{(0)} = (1{,}5;\,2)^T$. В поставленной задаче $\varepsilon = 0{,}01$.

Так как $W(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ e^{x_1-1} & 3x_2^2 \end{pmatrix}$, то положим

$$A_0 = W(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1{,}6487 & 12 \end{pmatrix}.$$

Результаты расчетов приведены в таблице 3.22.

Найдено приближенное решение: $x_* \cong (1{,}003084;\,0{,}9992213)^T$.■

Задачи для самостоятельного решения

1. Методами половинного деления, хорд, простых итераций, Ньютона, упрощенным методом Ньютона найти корни уравнений ($\varepsilon = 10^{-3}$):

1) $x^4 - 2x - 4 = 0$ (положительный корень);
2) $2 - \lg x - x = 0$;
3) $\mathrm{tg}(1{,}9x) - 2{,}8x = 0$;
4) $\sin(2{,}2x) - x = 0$;
5) $\ln(8x) = 9x - 3$;
6) $0{,}7e^{-0{,}59x} - x = 0$;
7) $5{,}6\sin(4{,}8x) - 4{,}5x = 0$;
8) $x^4 - 4x - 1 = 0$;
9) $\mathrm{tg}x = x$ (наименьший положительный корень);
10) $x^4 - 3x^2 + 75x - 10\,000 = 0$ (отрицательный корень);
11) $x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$;
12) $x^3 - 0{,}2x^2 - 0{,}2x - 1{,}2 = 0$ (положительный корень);
13) $x^5 - x - 0{,}2 = 0$ (положительный корень);
14) $x^3 - 2x - 5 = 0$;
15) $x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$;
16) $x^3 + 2x - 7 = 0$;
17) $x^4 + 3x - 20 = 0$.

2. Методами простых итераций, Зейделя, Ньютона, секущих, упрощенным методом Ньютона решить системы ($\varepsilon = 10^{-3}$):

1) $\begin{cases} 2x_1^3 - x_2^2 - 1 = 0, \\ x_1x_2^3 - x_2 - 4 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin(x_1 + 1) - x_2 = 1, \\ 2x_1 + \cos x_2 = 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x_1 + \mathrm{tg}(x_1x_2) = 0, \\ (x_2^2 - 6)^2 + \ln x_1 = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \mathrm{tg}(x_1x_2 + 0{,}2) = x_1^2, \\ x_1^2 + 2x_2^2 = 1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x_1 - 2x_2^2 + 1 = 0, \\ -x_1^2 + 2x_2 - 1 = 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \cos(x_1 + 0{,}5) - x_2 = 2, \\ \sin x_2 - 2x_1 = 1. \end{cases}$